

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB  
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XX, NR. 9

---

# EIN NEUES VERFAHREN ZUR MESSUNG AKUSTISCHER IMPEDANZEN

VON

V. THORSEN



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1943

Printed in Denmark  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S

## EINLEITUNG

Die Messung der schallabsorbierenden Eigenschaften von Stoffen hat in den letzten Jahren auf Grund der grossen Bedeutung, die der Begriff Schalldämpfung erlangt hat, erneutes Interesse erfahren. Es sind verschiedene Verfahren zur Beschaffung der erforderlichen technischen Hilfsmittel vorgeschlagen und angewandt worden, um der Lösung der Probleme auf sicherer mathematischer Grundlage näher zu kommen. Die moderne Elektroakustik war hierfür von grosser Bedeutung, und die Zusammenarbeit mit der Elektrotechnik hat neue Gesichtspunkte erschlossen, die gute Ergebnisse gezeitigt haben.

Bei den älteren Messungen von Absorptionskoeffizienten war die Phasenänderung an der Oberfläche des Stoffes nicht berücksichtigt worden. Ein klarer Überblick wurde erst mit Einführung der akustischen Impedanz  $Z = \frac{p}{v}$  erzielt, wobei  $p$  der Schalldruck und  $v$  die Partikelgeschwindigkeit (Schnelle) ist, die, in komplexer Form gegeben, Absorption und Phasenänderung des Stoffes eindeutig bestimmt. Eine Übersicht über Methoden zur Impedanzmessung findet sich im Handb. d. Exp. Phys. Bd. XVII, 2, S. 70. Eine weitere, neue Methode ist die Schustersche Brücke<sup>1</sup>, eine akustische Wheatstonesche Brücke, die in recht einfacher Weise — leider aber nur innerhalb eines ziemlich engen Wellenlängenbereiches, nämlich etwa 400—1600 Hz. — gute Messungen auf rein akustischer Grundlage gestattet. Eine gewisse Erweiterung der Methode wurde von MENZEL<sup>2</sup> gegeben. Im folgenden sollen einige kritische Bemerkungen zur Schusterschen Brücke gemacht werden.

<sup>1</sup> K. SCHUSTER: Akust. Zs. 4, 253, 1939 (mit Literaturhinweisen auf frühere Arbeiten).

<sup>2</sup> W. MENZEL: Akust. Zs. 5, 257, 1940.

## Das neue Verfahren.

Die Ausarbeitung des neuen Verfahrens fusst auf einem Vergleich von akustischen mit elektrischen (Wechselstrom-) Kreisen.

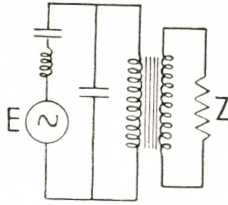
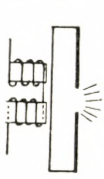


Fig. 1.

Ein gewöhnliches Telephone, das Schallenergie in den Raum strahlt, ist ein akustischer Transformator, dessen akustisches Bild und elektrisches Analogon in Fig. 1 wiedergegeben sind. Die schwingende Membran ist der Generator, der unter Berücksichtigung seiner Masse und Elastizität (Selbstinduktion

und Kapazität) die Luft durch den Vorraum (die primäre Wicklung) in Bewegung setzt (Stromstärke). In der Öffnung (der sekundären Wicklung) erlangen die Partikeln grössere Geschwindigkeit, die durch das Verhältnis von dem wirksamen Membranareal zu dem Areal der Öffnung (Übertragungsverhältnis) bestimmt ist. Die Öffnung strahlt Energie in den umgebenden Raum entsprechend ihrer akustischen Impedanz aus (der Sekundärstrom gibt Energie in einem äusseren Kreis ab). Der reelle Teil der Impedanz, der Strahlungswiderstand, bestimmt die ausgestrahlte Energiemenge, der imaginäre Teil bestimmt die Phase. Ein etwaiger Verlust im Vorraum, z. B. durch Reibung oder dgl., vermindert die Wirkung und ist durch einen über die primäre Wicklung des Transformators geschunteten Verlustkondensator symbolisiert.

Im folgenden wird das Telephone der Bequemlichkeit halber nicht als Transformator, sondern lediglich als akustischer

Generator betrachtet, wobei der Generator dann als der Luftpfropf angesehen werden kann, der wie ein Stempel in der Öffnung schwingt (Kolbenmembran).

Wird das Telephone vor der Öffnung mit einem Rohr versehen, dessen Durchmesser gleich dem Öffnungsdurchmesser ist, so ergeben sich die obenstehenden Bilder (Fig. 2).



Fig. 2.

Der akustische Generator arbeitet auf einer äusseren Impedanz, bestehend aus dem rein imaginären Teil des Rohres ( $Z_1$ ) und dem reellen Teil  $R$ , dem Strahlungswiderstand. Danach ergibt sich

$$Z = R + Z_1 = R + iq_1$$

$$|Z|^2 = R^2 + q_1^2.$$

Der Effekt Eff wird

$$\text{Eff} = \frac{R}{R^2 + q_1^2} \cdot E^2,$$

wobei  $E$  die elektromotorische Kraft ist.

Der Effekt erreicht ein Maximum für  $q_1 = 0$  und hat dann den Wert

$$\text{Eff}_{\max} = \frac{1}{R} \cdot E^2.$$

Die Grösse von  $R$  finden wir auf Grund folgender Betrachtungen: Der Zusammenhang zwischen Absorptionskoeffizient  $a$ , Phasenunterschied  $\mathcal{J}$  und akustischer Impedanz  $Z = w + iq$  ist bekanntlich gegeben durch die Gleichungen

$$a = \frac{4w}{(w+1)^2 + q^2} \quad \text{und} \quad \text{tg } \mathcal{J} = \frac{2q}{w^2 + q^2 - 1},$$

wobei jedoch zu bemerken ist, dass  $w$  und  $q$  die relativen Widerstandswerte sind, d. h. die wirklichen Widerstandswerte dividiert durch den Widerstand der Luft  $\rho c$ . Werden diese Gleichungen etwas umgeschrieben, so zeigt es sich, dass sie zwei Systeme von Kreisen mit dem Absorptionskoeffizienten bzw. der Phase als Parameter darstellen. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} & \left( w - \frac{2-a}{a} \right)^2 + q^2 = \frac{4(1-a)}{a^2} \\ & \left( \text{Mittelpunkt: } \left( \frac{2-a}{a}, 0 \right) \text{ Radius: } \frac{2}{a} \sqrt{1-a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



$$\left. \begin{aligned} w^2 + (q - \cot \vartheta)^2 &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \\ \left( \text{Mittelpunkt: } (0, \cot \vartheta), \text{ Radius: } \frac{1}{\sin \vartheta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

System (1) schneidet die  $w$ -Achse in zwei Punkten,  $w_1$  und  $w_2$ , so dass  $w_1 \cdot w_2 = 1$ .  $w_1$  entspricht der Phase  $\vartheta = 0$ ,  $w_2$  der Phase  $\vartheta = 180^\circ$ .  $a = 0\%$  gibt die  $q$ -Achse selbst. System (2) schneidet die  $q$ -Achse in zwei Punkten,  $q_1 = \cot \frac{\vartheta}{2}$  und  $q_2 = -\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ , entsprechend den Phasen  $90^\circ$  bzw.  $-90^\circ$  ( $270^\circ$ ).  $\vartheta = 0$  gibt die  $w$ -Achse vom Punkt  $(1, 0) \rightarrow \infty$ ,  $\vartheta = 180^\circ$  gibt die  $w$ -Achse von  $(1, 0)$  bis  $(0, 0)$ . Alle Kreise im System (2) gehen durch  $(1, 0)$ , der ausserdem ein 100%iger Absorption entsprechender, singulärer Punkt im System (1) ist. Die Schnittpunkte zwischen (1) und (2) ergeben zwei Gruppen von Werten für  $w$  und  $q$ .  $w$  wird stets positiv; das Vorzeichen von  $q$  entscheidet, ob der Blindwiderstand induktiv (+) oder kapazitiv (−) ist.

$q_1 = 0$  bedeutet  $\vartheta = 180^\circ$ , woraus sich ergibt, dass

$$\operatorname{Eff}_{\max} = \frac{1}{w_2} \cdot E^2,$$

wo  $w_2$  der kleinste Wert der Schnittpunkte des Absorptionskreises mit der  $w$ -Achse ist.

Es ist jedoch nicht von vornherein klar, ob der Blindwiderstand, wie im obigem Bilde, induktiv oder kapazitiv, oder eventuell ein Gemisch von beiden ist. Man kann sich deshalb ebenso gut ein Bild wie folgendes denken. Hierbei hat man

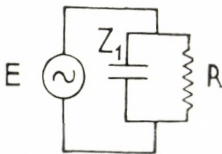


Fig. 3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{iq_1} \\ Z &= \frac{Rq_1^2}{R^2 + q_1^2} + i \cdot \frac{R^2q_1}{R^2 + q_1^2}. \end{aligned}$$

Ferner

$$|Z|^2 = \frac{R^2q_1^2}{R^2 + q_1^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Eff} = \frac{Rq_1^2}{R^2 + q_1^2} \cdot \frac{E^2}{|Z|^2} = \frac{1}{R} \cdot E^2;$$

dies ist der gleiche Ausdruck wie oben,  $R$  hat aber einen anderen Wert. Wenn  $q_1 = \infty$ , was  $\vartheta = 0$  bedeutet, so erhält man

$$\text{Eff}_{\min} = \frac{1}{w_1} \cdot E^2,$$

wobei  $w_1$  der grösste Wert der Schnittpunkte des Absorptionskreises mit der  $w$ -Achse ist.

Variiert man die Rohrlänge vor dem Telephon und misst man jedesmal die Ausstrahlung, so muss sich eine Kurve mit einem Maximum und einem Minimum ergeben, ähnlich der in Fig. 4 wiedergegebenen. Das Minimum liegt nahe bei der Rohrlänge  $l = \frac{\lambda}{4}$ , das Maximum nahe bei  $l = \frac{\lambda}{2}$ . Bildet man den Decibelunterschied zwischen der maximalen und der minimalen Ausstrahlung und rechnet in Energie ( $F$ ) um, so erhält man

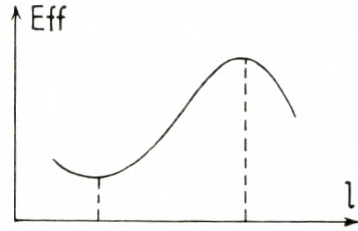


Fig. 4.

$$F = \frac{\text{Eff}_{\max}}{\text{Eff}_{\min}} = \frac{1}{w_2} \cdot E^2 : \frac{1}{w_1} \cdot E^2 = \frac{w_1}{w_2} = w_1^2.$$

Hiermit ist der Strahlungswiderstand  $w_1$  ( $= \sqrt{F}$ ) bestimmt, und der Absorptionskoeffizient ergibt sich aus der Gleichung

$$a = \frac{4 w_1}{(w_1 + 1)^2}.$$

Wenn  $a$  klein ist, kann man folgendermassen annähern: Die beiden Werte von  $w$  werden als Schnittpunkte des Kreises

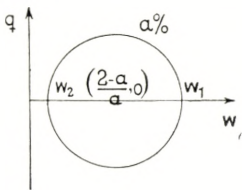


Fig. 5.

$$\left(x - \frac{2-a}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{4(1-a)}{a^2}$$

mit der  $w$ -Achse abgelesen.

Man erhält

$$w_1 = \frac{2-a + 2\sqrt{1-a}}{a}$$

$$w_2 = \frac{2-a - 2\sqrt{1-a}}{a}.$$

Man sieht erstens, dass  $w_1 \cdot w_2 = 1$ . Ferner beträgt  $w_1$  nahezu das Zweifache des Radius, also

$$w_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{a}.$$

Wird dies in  $F = w_1^2$  eingesetzt, so erhält man

$$a = \frac{4}{F} (\sqrt{F} - 2).$$

Aus vorstehendem erhellt, dass es möglich ist, Strahlungswiderstände experimentell zu bestimmen. Wenn man dazu eine Schustersche Brücke benutzt, so ergeben sich rein prinzipielle, messtechnische Schwierigkeiten, so dass man früher eigentlich auf eine Berechnung allein angewiesen war. Im folgenden soll gezeigt werden, wie die experimentell bestimmten Werte mit den auf theoretischem Wege errechneten übereinstimmen; zuerst sei jedoch eine Erweiterung der Theorie durch strengere Forderungen eingehender beschrieben.

### Erweiterung der Theorie.

Im vorstehenden ist eine andere Dämpfung als Strahlung, z. B. Reibung im Rohr, nicht berücksichtigt. Das ist indessen — jedenfalls bei höheren Frequenzen — notwendig, um so mehr, als man bei den Messungen variable Rohrlängen benutzt und infolgedessen mit verschiedener Rohrdämpfung zu rechnen hat. Es wird deshalb ein Verlustwiderstand in das elektrische Vergleichsbild eingeführt.

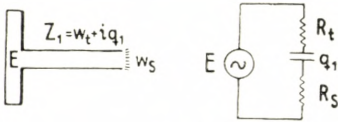


Fig. 6.

Man erhält

$$Z = R_t + R_s + i q_1; \quad |Z|^2 = (R_t + R_s)^2 + q_1^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Eff}_{\max} &= \frac{R_t + R_s}{(R_t + R_s)^2 + q_1^2} \cdot E^2 \\ &= \frac{R_t}{(R_t + R_s)^2 + q_1^2} \cdot E^2 + \frac{R_s}{(R_t + R_s)^2 + q_1^2} \cdot E^2. \end{aligned}$$



Wir beschäftigen uns hier lediglich mit dem Ausstrahlungseffekt und sehen, dass dieser, wie oben, Maximum für  $q_1 = 0$ ,  $\vartheta_1 = 180^\circ$  wird.

$$\text{Eff}_{\max} = \frac{R_s}{(R_t + R_s)^2} \cdot E^2.$$

Analog erhält man für den Minimumwert der ausgestrahlten Energie

$$\text{Eff}_{\min} = \frac{R_s}{(R_t + R_s)^2} \cdot E^2,$$

oder, in die akustischen Bezeichnungen übertragen,

$$\text{Eff}_{\max} = \frac{w_s}{(w_t + w_s)^2} \cdot E^2 \quad \text{und} \quad \text{Eff}_{\min} = \frac{W_s}{(w_t + W_s)^2} \cdot E^2,$$

wo  $W$  die grossen Werte der Schnittpunkte des Absorptionskreises mit der  $w$ -Achse, und  $w$  die kleinen Werte derselben Grösse bezeichnet. Der Verlustwiderstand ist stets mit den übrigen Widerständen serriegeschaltet (die Verlustdämpfung lässt sich nie umgehen), so dass der gleiche Wert, abgesehen von dem Unterschied auf Grund der verschiedenen Rohrlängen, in beiden Ausdrücken enthalten ist. (Er wird mit einem kleinen Buchstaben bezeichnet, da er im allgemeinen klein ist.)

Man hat also

$$F = \frac{\text{Eff}_{\max}}{\text{Eff}_{\min}} = \frac{w_s (w_t + W_s)^2}{W_s (w_t + w_s)^2}.$$

Wenn  $w_t \ll W_s$ , was im allgemeinen in hohem Grad der Fall ist, und da  $w_s \cdot W_s = 1$ , kann dieser Ausdruck auf

$$F = \frac{1}{(w_t + w_s)^2}$$

reduziert werden, woraus sich ergibt, dass

$$w_t + w_s = \frac{1}{\sqrt{F}}.$$

Während man nach der einfachen Theorie

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{F}}$$

fand, ist der wahre Strahlungswiderstand

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{F}} - w_t.$$

Die Kenntnis von  $w_t$  beruht auf einer Anzahl in den letzten Jahren angestellter Untersuchungen<sup>1</sup>, aus denen hervorgeht, dass der Absorptionskoeffizient für ein Rohr von der Länge  $l$

$$a = 1 - e^{-2\beta l}.$$

An Hand sehr sorgfältiger Untersuchungen und in Übereinstimmung mit theoretischen Betrachtungen wurde ermittelt, dass

$$\beta = 3,3 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{\nu}}{r} (1 + 0,0012 t),$$

wobei  $\nu$  die Frequenz,  $r$  der Radius des Rohres und  $t$  die Temperatur ist. Hiernach kann man  $w_t$  für die beiden in Betracht kommenden Rohrlängen berechnen, nämlich

$$l = \frac{\lambda}{4} \quad \text{und} \quad l = \frac{\lambda}{2}.$$

In dem Ausdruck für  $F$  sind die beiden  $w_t$  in Zähler und Nenner etwas verschieden, denn  $w_t$  des Zählers bezieht sich auf  $l = \frac{\lambda}{4}$ ,  $w_t$  des Nenners dagegen auf  $l = \frac{\lambda}{2}$ ;  $w_t$  für  $l = \frac{\lambda}{4}$  ist gewöhnlich mehrere hundertmal kleiner als  $W_s$ , so dass es, wie gesagt, im Zähler ausgelassen werden kann.

Das Reibungsproblem lässt sich indessen auch noch auf andere Weise lösen. Wenn der Reibungs-Absorptionskoeffizient für das Rohr

$$a = 1 - e^{-2\beta l},$$

<sup>1</sup> E. WAETZMANN & L. KEIBS: Ann. d. Phys. **22**, 247, 1935. H. OBERST: Akust. Zs. **2**, 76, 1937.

kann man in Wirklichkeit die  $w_s$ -Werte nicht als Schnittpunkte der Iso-Absorptionskreise mit der  $w$ -Achse ablesen, wohl aber auf der Kurvenschar mit der Gleichung

$$\left(x - \frac{2-a}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{4(1-a)}{a^2},$$

die nicht etwa einer Kreisschar, sondern einer Spirale entspricht; wird darin  $y = 0$  gesetzt und ist  $a = 1 - e^{-2\beta l}$ , so erhält man

$$\left(x - \frac{1 + e^{-2\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}}\right)^2 = \frac{4e^{-2\beta l}}{(1 - e^{-2\beta l})^2},$$

woraus

$$x - \frac{1 + e^{-2\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}} = \pm \frac{2e^{-\beta l}}{1 - e^{-2\beta l}}.$$

Hieraus findet man

$$x_1 = \frac{(1 + e^{-\beta l_1})^2}{1 - e^{-2\beta l_1}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{(1 - e^{-\beta l_2})^2}{1 - e^{-2\beta l_2}},$$

wo  $l_1$  und  $l_2$  die beiden Rohrlängen sind, durch die die Impedanz des Rohres reell wird.

Da

$$e^{-\beta l} = 1 - \frac{\beta l}{1!} + \frac{(\beta l)^2}{2!} - \dots$$

kann man, wenn  $\beta \cdot l$  klein ist, Glieder der 2ten und höherer Potenzen von  $\beta \cdot l$  weglassen und erhält dann

$$x_1 = \frac{2}{\beta l_1} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\beta l_2}{2}.$$

Fig. 7 zeigt die Impedanz des Rohres als Funktion seiner Länge. Für  $l = \frac{\lambda}{4}$  erhält man  $w_1 = x_1$ , für  $l = \frac{\lambda}{2}$  wird  $w_2 = x_2$ . Würde man einen Iso-Absorptionskreis zur Bestimmung des Strahlungswiderstandes verwenden, so wäre das ein Fehler, denn mit zunehmender Rohrlänge erhöhen sich die weniger als 1 betragenden  $w_s$ -Werte um  $x_2$  und die grossen  $w_s$ -Werte um  $\frac{1}{x_1}$  (nicht um  $x_1$ , da  $w_s$  und  $w_t$  in Serie geschaltet sind und der grosse  $x_1$ -Wert nur vorkommt, wenn  $w_t$  und der induktive

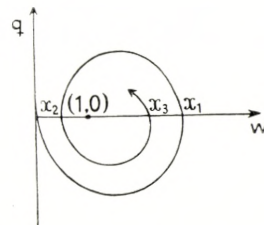


Fig. 7. Die Spirale beginnt in (0,0), geht zunächst nach negativen  $q$ -Werten (kapazitiver Widerstand, Elastizität) und dreht sich weiter, bis sie für ein unendlich langes Rohr in (1,0) endet.

Widerstand des Rohres als parallel verbunden betrachtet werden). Um  $w_s$  zu ermitteln, muss also von  $w_2$ , das man aus  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{F}}$  bestimmt,  $x_2$  abgezogen werden.

Demnach

$$w_2 = w_s + w_l = \frac{1}{\sqrt{F}}.$$

### Messung einer beliebigen, unbekanntem Impedanz.

Es soll jetzt der Fall betrachtet werden, dass das Rohr mit einem Widerstand, und zwar z. B. durch eine mit einem Loch versehene Platte, abgeschlossen wird. Das akustische Bild und

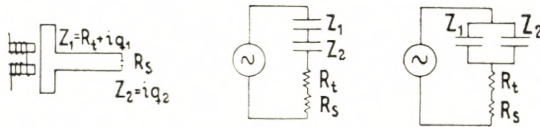


Fig. 8.

die beiden entsprechenden elektrischen Bilder sind in Fig. 8 wiedergegeben.  $R_t$  ist der Verlustwiderstand des Rohres,  $R_s$  sein Strahlungswiderstand.

Für Fall 1 (Reihenverbindung) hat man dann

$$Z = R_t + R_s + Z_1 + Z_2 = R_t + R_s + i(q_1 + q_2)$$

$$|Z|^2 = (R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2$$

$$\text{Eff} = \frac{R_t + R_s}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2} \cdot E^2$$

$$= \frac{R_t}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2} \cdot E^2 + \frac{R_s}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2} \cdot E^2.$$

Die Ausstrahlung erreicht ein Maximum, wenn

$$q_1 + q_2 = 0$$

oder

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = (2p + 1)\pi$$

und wird dann

$$\text{Eff}_{\max} = \frac{w_s}{(w_s + w_l)^2} \cdot E^2.$$



Für Fall 2 (Parallelverbindung) erhält man auf die gleiche Weise

$$Z = R_t + R_s + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = R_t + R_s + i \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2}$$

$$\text{Eff} = \frac{R_t + R_s}{(R_t + R_s)^2 + \frac{q_1^2 q_2^2}{(q_1 + q_2)^2}} \cdot E^2$$

$$= \frac{R_t}{(R_t + R_s)^2 + \frac{q_1^2 q_2^2}{(q_1 + q_2)^2}} \cdot E^2 + \frac{R_s}{(R_t + R_s)^2 + \frac{q_1^2 q_2^2}{(q_1 + q_2)^2}} \cdot E^2.$$

Die Ausstrahlung hat ein Minimum für

$$q_1 + q_2 = \infty$$

oder

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 0$$

und der Minimumwert wird

$$\text{Eff}_{\min} = \frac{W_s}{(w_t + W_s)^2} \cdot E^2.$$

Man erhält also genau dieselbe Ausstrahlungskurve wie vorher, die Lage von Maximum und Minimum hat sich aber infolge des Vorhandenseins der festen Platte verschoben, und auch die Maximal- und Minimalwerte für die Ausstrahlung sind anders (kleiner) geworden, da sich der Strahlungswiderstand des Hauptrohres verändert hat. Betrachtet man, wie oben, das Verhältnis  $F$  von Maximum- zu Minimizeffekt, so hat man

$$F = \frac{w_s}{W_s} \cdot \frac{(w_t + W_s)^2}{(w_t + w_s)^2},$$

was auch, wenn  $w_t \ll W_s$  in den einfacheren Ausdruck

$$F = \frac{1}{(w_t + w_s)^2}$$

übergeht.

Man könnte sich schliesslich eine dritte Verbindungsart denken, wie sie in Fig. 8a wiedergegeben ist.

Hier erhält man

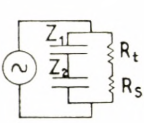


Fig. 8 a.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{R_t + R_s}; \quad Z = \frac{(R_t + R_s) \cdot (Z_1 + Z_2)}{R_t + R_s + Z_1 + Z_2}$$

$$Z = \frac{(R_t + R_s) \cdot (q_1 + q_2)^2}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2} + i \frac{(R_t + R_s)^2 \cdot (q_1 + q_2)}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2}$$

wo

$$|Z|^2 = \frac{(R_t + R_s)^2 \cdot (q_1 + q_2)^2}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2}.$$

Der Ausstrahlungseffekt wird somit

$$\text{Eff} = \frac{R_s (q_1 + q_2)^2}{(R_t + R_s)^2 + (q_1 + q_2)^2} \cdot \frac{E^2}{|Z|^2} = \frac{R_s}{(R_t + R_s)^2} \cdot E^2,$$

d. h. Fall 1 und Fall 2 völlig entsprechend.

$F$  muss so gross sein, dass  $w_s$  positiv wird, also

$$\frac{1}{\sqrt{F}} - w_t > 0.$$

Wenn kein  $w_t$  da wäre, könnte das Maximum theoretisch  $= \infty$  und das Minimum  $= 0$  sein, nämlich für  $w_s = 0$ ,  $W_s = \infty$ . Sobald ein  $w_t$  da ist, muss das Maximum niedriger werden (und das Minimum höher), da aus dem Rohr nicht mehr als die vom Telephon stammende Energie kommen kann minus derjenigen, die im Rohr durch Reibung usw. ( $w_t$ ) verloren gegangen ist.

Bei der Ableitung der vorstehenden Formeln für die ausgestrahlte Energie war es am praktischsten,  $Z_1$  als aus Strahlungswiderstand, Verlustwiderstand und Blindwiderstand bestehend und  $Z_2$  als reinen Blindwiderstand zu betrachten. In Wirklichkeit könnte man den Strahlungswiderstand natürlich ebenso gut mit  $Z_2$  verknüpfen, dies um so mehr, als er als Loch in einer Platte zutage tritt. Bei der Messung der Impedanz einer solchen Platte mit einer Schusterschen Brücke würde man auf rein prinzipielle Schwierigkeiten stossen, die sich besonders stark geltend machen, wenn der Absorptionskoeffizient des Loches klein ist. Setzt man nämlich die Impedanz  $Z_2$  vor das Ende der Brücke und schafft Gleichgewicht durch Verschiebung von Filz- und Stempelrohr, so weiss man in Wirklichkeit nur, dass die Impedanz in den beiden Symmetriequer-

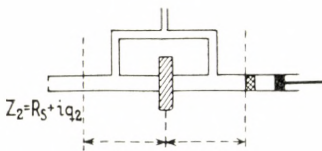


Fig. 9.

schnitten die gleiche ist; während man die Phase bei  $Z_2$  durch einfache Rechnung ermitteln kann, wird bei der Absorptionsbestimmung die Absorption im Rohrstück von der linken punktierten Linie bis  $Z_2$  mitgerechnet. Denkt man sich dieses Rohrstück verlängert oder verkürzt, so muss das Filzrohr um ein ebenso grosses (symmetrisches) Stück verschoben werden, so dass man stets die gleiche (und richtige) Phase und die gleiche (aber falsche) Absorption findet. Die wirkliche Absorption bei  $Z_2$  ist daher erst nach Abzug der Verlustabsorption im Rohr zu bestimmen. Das bedeutet, dass die Verlustdämpfung in der vorstehend entwickelten Methode nicht berücksichtigt ist, was jedoch, wie die Messungen selbst ergeben haben, sehr grosse Fehler nach sich zieht (s. Näheres im folgenden). Hierzu kommt dann noch, dass man bei der von Schuster angegebenen, rein akustischen Eichungsmethode des variablen Widerstandes Absorptionswerte nur für Rohre von Längen, die Multipla von  $\frac{\lambda}{2}$  sind, erlangen kann, d. h., dass man für Rohrlängen zwischen 0 und  $\frac{\lambda}{2}$  gar keine Absorptionswerte bekommt; und gerade solche Werte sollten zur Korrektur in dem vorstehend besprochenen Falle benutzt werden. Diesen Nachteil vermeidet man bei elektro-akustischer Eichung des Widerstandes; die Korrektur ist aber in allen Fällen auszuführen.

Man kann die Eingangsimpedanz dagegen mit ziemlich guter Genauigkeit mit der Schusterschen Brücke messen, wenn sie vor das Telephon gesetzt wird, wie auf Fig. 10 zu sehen ist. Hierbei bestimmt man die Impedanz ( $Z$ ) des Gesamtsystems, und die oft grossen Absorptionswerte, jedenfalls, wenn  $\vartheta$  nahezu  $180^\circ$  ist, brauchen in dem Rohrstück der Schusterschen Brücke kaum für Verlustabsorption korrigiert zu werden.

Soll die Impedanz eines gegebenen Stoffes gemessen werden, so wird derselbe als Abschlussplatte vor die Mündung eines Rohres gebracht, das vor das Telephon gesetzt wird. Das Telephon als akustischer Generator arbeitet nun auf einer äusseren Impedanz, deren Strahlungswiderstand der reelle Teil der Impedanz des Stoffes und deren Verlustwiderstand die Dämpfung des Rohres ist, während der Blindwiderstand die Summe der Blindwiderstände des Rohres und des Stoffes ist. Aus der Verschiebung, die das Ausstrahlungsmaximum im Verhältnis zum Maximum für ein freistrahrendes Rohr erhält, wird der Phasensprung an der Oberfläche des Stoffes (der Blindwiderstand des Stoffes)

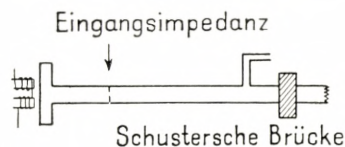


Fig. 10.



berechnet, da  $\vartheta_1 + \vartheta_2 = (2p + 1)\pi$ . Das Verhältnis von Maximum- zu Minimumwerten ( $F$ ) ist

$$F = \frac{1}{(w_t + w_s)^2} \quad (\text{wenn } w_t \ll W_s),$$

sonst

$$F = \frac{w_s}{W_s} \frac{(w_t + W_s)^2}{(w_t + w_s)^2}.$$

Die unbekannte Impedanz wird alsdann

$$Z_2 = w_2 + iq_2,$$

wobei  $w_2$  und  $q_2$  die  $w$ - bzw.  $q$ -Werte der Schnittpunkte des Absorptionskreises ( $w_s$ ) mit der der  $w$ -Achse parallelen Geraden sind, und zwar  $q = \cot \frac{\vartheta_2}{2}$ .

### Anwendung auf verwandten Gebieten.

#### A. Die dämpfende Wirkung rauher Stoffe.

Im vorstehenden wurde die Grösse  $\beta$  für die Dämpfung von Schallwellen in einem Rohr nach der Kirchhoff-Helmholtzschen Formel

$$\beta = \frac{1}{c \cdot r} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \pi \nu \left[ 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \right]$$

benutzt, wo  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $r$  der Rohrradius,  $\nu$  die Frequenz,  $\rho$  das spez. Gewicht,  $\mu$  der Koeffizient für innere Reibung und  $z = \frac{c_p}{c_v}$  ist. Die Gültigkeit dieser Formel ist in letzter

Zeit einer grossen Anzahl systematischer Untersuchungen unterzogen worden, wobei sich herausgestellt hat, dass man in Wirklichkeit mit 15 % höheren Werten rechnen muss als man direkt findet. Für ein glattes Messingrohr wird man  $\beta$  daher jetzt als sicher bekannt annehmen dürfen. In den vorstehend entwickelten Formeln sind die Verlustdämpfung und die Strahlungsdämpfung enthalten. Wenn man den Strahlungswiderstand kennt, kann man also aus dem Ausdruck  $F = \frac{1}{(w_t + w_s)^2}$  die Verlustdämpfung ermitteln und sehen, wie diese vom Wandmaterial abhängt.



Man kann ein glattes Messingrohr geradezu als Normale benutzen, seine Ausstrahlung messen und daraus, da  $\beta$  bekannt ist, den Strahlungswiderstand ermitteln. Man macht danach ein Rohr aus dem Stoff, dessen dämpfende Wirkung untersucht werden soll, und der den gleichen Strahlungswiderstand hat (oder man bekleidet das Innere eines Messingrohres mit dem Stoff), und kann danach aus der Änderung der Ausstrahlung die vom Stoff verursachte Änderung der Wanddämpfung berechnen.

Damit haben wir ein Verfahren, um die reibungsdämpfende Wirkung eines Stoffes gegenüber Schall zu messen.

### B. Das künstliche Ohr.

Mit der Entwicklung elektrischer Hörapparate hat auch die Herstellung eines künstlichen Ohres grosses Interesse erlangt. Der erste derartige Versuch, der jedoch zum Teil auf falschen Voraussetzungen beruht, wurde von GERLACH<sup>1</sup> angestellt. Als brauchbare Modelle werden heute die Konstruktionen von WEST<sup>2</sup> und von INGLIS, GRAY & JENKINS<sup>3</sup> betrachtet. In beiden Modellen wird versucht, mit Hilfe eines Kondensatormikrophons den Schalldruck zu messen, der in einer kleinen Kammer vor einem akustischen Widerstande entsteht. Die kleine Kammer entspricht dem Raum zwischen einem Telephon und dem Ohr, der akustische Widerstand dem Ohr. Dieser Widerstand kann mit Hilfe elektro-akustischer Eichung derart gewählt werden, dass er dem mittleren Widerstandswert normaler Ohren entspricht.

Der Raum vor dem Modell hat ferner eine Impedanz, die der mittleren Impedanz der Räume vor normalen Ohren entspricht. Beide Modelle sind demnach »Mittelohren«; Änderungen, die bei schwerhörigen Ohren vorkommen können und die vielleicht gerade mit veränderten Impedanzeigenschaften des schwingenden Systems in Verbindung stehen, werden also nicht berücksichtigt. Die Eigenschaften normaler Ohren variieren aber auch beträchtlich. Die meisten Ohren haben negativen Blindwiderstand, d. h. das schwingende System ist elastisch (der Blindwiderstand kapazitiv), bisweilen wird er aber positiv ge-

<sup>1</sup> E. GERLACH: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **3**, 139, 1923/24.

<sup>2</sup> W. WEST: Post Office Electr. Eng. Journ. **22**, 260, 1929/30.

<sup>3</sup> H. A. INGLIS, C. H. G. GRAY u. R. T. JENKINS: Bell Syst. Techn. Journ. **11**, 293, 1932.

funden. Es muss also eine Zunahme der Masse vorliegen (der Blindwiderstand induktiv). Auf Grund dieser Verschiedenheit, die von grossem Einfluss auf die Energieabsorption des Ohres ist, dürfte die Konstruktion eines »Mittelohres« von verhältnismässig geringer Bedeutung sein. Das Ohrmodell soll dazu dienen, den Energietransport durch das Trommelfell zum innern Ohr bei einem bestimmten Schalldruck vor dem Ohr zu berechnen.

Die scharfe Formulierung dieses Problems ist WAETZMANN<sup>1</sup> zu verdanken. Eine direkte Messung des Energietransportes ist vorderhand ausgeschlossen, da ein Eingriff in das Ohr zwecks Anbringung von Messapparaten nicht möglich ist. Dagegen kann man die von einem Telephon ausgehende, durch das Trommelfell zugeführte Energie messen, wenn man das Telephon als akustischen Generator mit einer äusseren Impedanz, die der des Ohres entspricht, arbeiten lässt, und die in der Impedanz in Gestalt von Strahlung abgesetzte Energiemenge misst. Dies ist nach den vorstehenden Ausführungen eben dadurch möglich, dass man als Strahlungswiderstände eine Anzahl Löcher in einer Platte und als Blindwiderstände eine variable Rohrlänge benutzt. Mit Hilfe einer so einfachen Einrichtung sind natürlich nur wenige diskrete Werte für die Absorptionskoeffizienten zu erlangen; es muss aber möglich sein, eine Art Irisblende herzustellen, die eine fortgesetzte Variation der Lochgrösse gestattet. Als kontinuierlich variabler Blindwiderstand könnte, ebenso wie bei der Schusterschen Brücke, ein Rohr, das in einem anderen verschiebbar ist, dienen.

Um zu messen, welche Energie ein elektrischer Hörapparat an das Ohr abgibt, könnte folgendes Verfahren angewandt werden:

1. Die freie Ausstrahlung des Hörapparates wird für alle gewünschten Frequenzen<sup>2</sup> gemessen.

2. Die Impedanz des Ohres wird für die gleichen Frequenzen mit einer Schusterschen Brücke (unter Berücksichtigung der erforderlichen Korrekturen) gemessen.

3. Die variable akustische Impedanz wird für jede Frequenz gleich der Impedanz des Ohres eingestellt und

4. vor das Telephon gebracht, wonach die Ausstrahlung gemessen wird.

<sup>1</sup> E. WAETZMANN & L. KEIBS: Akust. Zs. **1**, 3, 1936.

<sup>2</sup> V. THORSEN: Akust. Zs. **3**, 218, 1938.



Ist der Abstand zwischen Telephon und Messapparat (Kondensatormikrophon) in den Fällen 1 und 4 der gleiche, so erfahren wir, welcher Bruchteil der Energie, die das Telephon (frei) ausstrahlen kann, im Ohr wirklich absorbiert wird. Nimmt man an, dass die Schwellenwertkurve eines Ohres für gewisse Frequenzen — oder Frequenzgebiete — eine Anzahl Decibel höher ist, so muss es mittels einer Verstärkeranordnung möglich sein, so viel Energie von den verschiedenen Frequenzen zuzuführen, dass der Gehörverlust ersetzt wird. Möglicherweise wird es auch erforderlich, andere Frequenzen, die der Hörapparat besonders kräftig verstärkt (z. B. durch Resonanz), abzuschwächen; das ist ebenfalls wichtig, da sonst eine Überdeckungswirkung entstehen könnte. Anders ausgedrückt: es wird bezweckt, dem System Hörapparat plus Ohr eine normale Schwellenwertkurve zu geben. Dies ist zwar allgemein anerkannt, bisher aber noch nie verwirklicht worden; ein Verfahren nach den hier skizzierten Richtlinien wird natürlich sehr viel experimentelle Arbeit erfordern.

### Experimentelle Ergebnisse.

Die Versuche wurden mit einem speziell hierfür gebauten Telephon ausgeführt. Es bestand aus einem dicken Messingzylinder mit runder Ausbohrung, worin das Magnetsystem eingeführt und festgespannt war. In angemessenem Abstand von den Magneten wurde die Membran mit Siegellack befestigt, so dass sie wie eine längs des Randes eingespannte (sonst aber spannungsfreie) Platte schwang. Das Ohrstück war durch eine 3 mm dicke Bleiplatte ersetzt, die zentrisch 6 mm gebohrt war. Die Vorderplatte des Telephons wurde mit einem 1,3 cm langen Messingrohr von 6 mm lichter Weite versehen, so dass die Gesamtlänge des vor dem Telephon befindlichen Rohres 1,7 cm beträgt. Mit einem Stückchen Gummischlauch wurden nun 6 mm Messingrohre verschiedener Länge mit dem kurzen Rohrstück verbunden, indem die Rohre im Gummischlauch ganz dicht zusammengefügt wurden; die Ausstrahlung wurde dann als Funktion der Gesamtrohrlänge gemessen. Die Erfahrung lehrt, dass diese Art des Zusammenfügens vortrefflich ist, denn dabei

erhält man eine ebene fortschreitende Welle im ganzen Rohr; es ist aber notwendig, dass die zusammengefügt Rohre von genau demselben inneren Durchmesser sind. Derartige Stücke

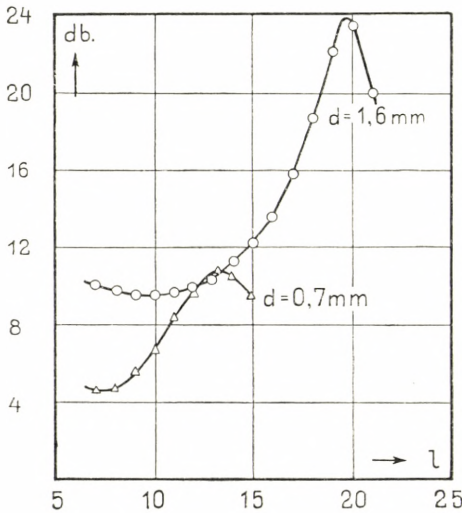


Fig. 11.

müssen unter gewöhnlichen, gezogenen Messingrohren ausgesucht werden. Das Telephone wurde in dem schallisolierten und schallgedämpften Raum dem Kondensatormikrophon gegenüber so angebracht, dass die Mündung des Rohres stets 20,0 cm von dem Mikrophon entfernt war. Im übrigen wurden die Messungen in der in einer früheren Abhandlung<sup>1</sup> beschriebenen Weise ausgeführt. Die Versuche wurden für die Wellenlänge  $\lambda_{20^\circ} = 44,3$  cm,  $n = 768$  Hz durchgeführt.

Es wurde die Ausstrahlung von der natürlichen Rohröffnung gemessen und ferner die Ausstrahlung, wenn die Öffnung mit Platten abgeschlossen war, worin sich runde Löcher von verschiedenem Durchmesser befanden. In Fig. 11 sind Messungen bei 2 Lochgrößen, nämlich 1,6 und 0,7 mm, graphisch darge-

Tabelle 1.

$d$	$l$	$\vartheta$	$\vartheta_s$
6,0	21,8	-185	-185
1,6	19,4	-226	-232
1,3	18,3	-242	-249
1,1	17,3	-259	-259
0,8	15,0	-296	-294
0,7	13,4	-322	-307
0,6	12,6	-335	-316
0,5	12,0	-345	-334

Tabelle 2.

$d$ in mm	db	$F$	$w_1$	$w_2$	$w_s$	$a$
6,0	21,8	151,5	12,3	0,081	0,036	13,5
1,6	15,5	35,5	5,95	0,168	0,123	39
1,3	12,6	18,2	4,28	0,233	0,188	53,5
1,1	11,0	12,6	3,55	0,282	0,237	62
0,8	7,7	5,9	2,43	0,411	0,366	80
0,7	6,2	4,2	2,04	0,490	0,445	85
0,6	6,2	4,2	2,04	0,490	0,445	85
0,5	8,3	6,8	2,60	0,385	0,340	75

<sup>1</sup> V. THORSEN: loc. cit.



stellt. Sie sollen gleichzeitig zur Beurteilung der Genauigkeit dienen, die befriedigend ist. Die Messpunkte liegen gut auf glatten Kurven mit ausgeprägten Maxima und Minima. Für die Lage der Maxima wurden vorstehende Werte ermittelt (Tab. 1). In der 3. Kolonne sind die nach der

$$\text{Formel } \vartheta = -180^\circ - \frac{22,15 - l}{\frac{\lambda}{2}} \cdot 360^\circ$$

berechneten Phasenwinkel  $\vartheta$  aufgeführt. Die letzte Kolonne zeigt die mit einer geeichten Schusterschen Brücke gemessenen Phasenwinkel ( $\vartheta_s$ ). Die Übereinstimmung ist ziemlich befriedigend.

Das Verhältnis  $F$  von Maximum- zu Minimumausstrahlung für die verschiedenen Löcher ist in Tab. 2 zusammengestellt. Diese Tabelle enthält ausserdem die  $w$ -Werte

( $w_1 = \sqrt{F}$   $w_2 = \frac{1}{\sqrt{F}}$ ); die 3. Kolonne ist  $F$ , nämlich der Antilogarithmus zu  $\frac{1}{10}$  mal dem Decibelunterschied zwischen maximaler und minimaler Ausstrahlung (2. Kolonne). In der letzten Kolonne schliesslich ist der Absorptionskoeffizient des reellen Strahlungswiderstandes (in %) verzeichnet.  $w_l$  kann aus  $\frac{\beta l}{2}$  berechnet werden und würde Werte zwischen 0,035 und 0,050 ergeben; es wurde aber ein experimentell bestimmter Mittelwert,  $w_l = 0,045$ , benutzt. Danach erhält man  $w_s$  als  $w_s = w_2 - w_l$ .

Ferner wurde die nachstehende Messreihe zum Vergleich durchgeführt. Mit Hilfe der Schusterschen Brücke wurden die Absorptionskoeffizienten von einer Anzahl Löcher gemessen, wenn sie in der in Fig. 10 dargestellten Weise als Ausgangsimpedanzen in einer variablen Rohrlänge vor dem Telephon angebracht waren, also nach dem Telephon zu gesehen. Dadurch erhält man eine Anzahl schön verlaufender Kurven mit ausgeprägten Maxima und Minima. Zur Veranschaulichung des Kurvenverlaufes und der Genauigkeit sind die Ergebnisse der Messungen der Löcher mit  $d = 1,1$  bzw.  $0,7$  mm in Fig. 12 wiedergegeben. Man findet einen variablen Absorptionskoeffizienten,

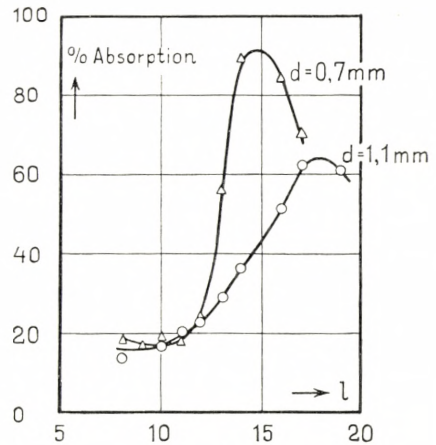


Fig. 12.

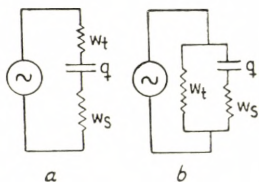


Fig. 13.

der für  $\vartheta = 180^\circ$  ein Maximum und für  $\vartheta = 0^\circ$  ein Minimum aufweist, und zwar für die gleichen  $\vartheta$ -Werte, die eine Maximum- bzw. Minimausstrahlung ergeben. Das elektrische Vergleichsbild erhellt aus Fig. 13, *a* und *b*. Der erste Fall,  $\vartheta = 180^\circ$ , entspricht Fig. 13 *a*, wo  $q = 0$ , der zweite,  $\vartheta = 0^\circ$ , Fig. 13 *b*, wo  $q = \infty$ . Es gelingt also,

$$a_{\max} = w_t + w_s$$

und

$$a_{\min} = w_t$$

zu bestimmen. Dieser letztere Wert für  $w_t$  wurde in der vorstehenden Tab. 2 zur Bestimmung von  $w_s$  benutzt.

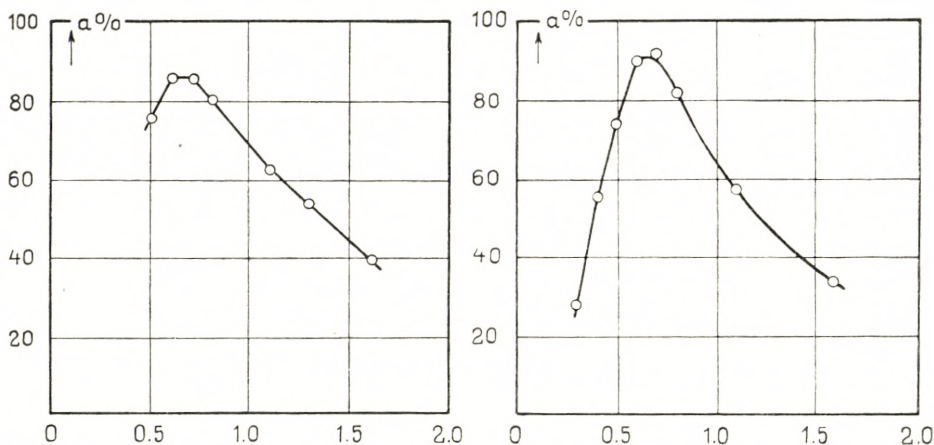


Fig. 14.

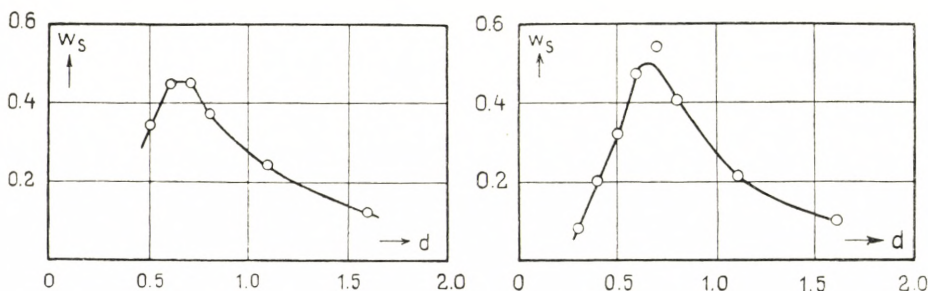


Fig. 15.

Auf Grundlage sämtlicher Messungen wurde Fig. 14 gezeichnet; diese Figur stellt den Absorptionskoeffizienten (angegeben in %) einer vor dem Telefon angebrachten Öffnung als Funktion des Durchmessers der Öffnung dar; die Werte wurden teils mit Hilfe der Ausstrahlungsmethode, teils mit Hilfe der Schusterschen Brücke gemessen, wobei im letzteren Falle von vorn nach dem Telefon zu gemessen wurde. Die Übereinstimmung ist gut.

Schliesslich zeigt Fig. 15 den »reinen« Strahlungswiderstand als Funktion des Durchmessers der Öffnung,  $a$  nach der Ausstrahlungsmethode,  $b$  mit der Schusterschen Brücke gemessen. Aus Fig. 14 und 15 ist ersichtlich, dass der Absorptionskoeffizient wie auch der Strahlungswiderstand ein Maximum für  $d = \text{ca. } 0,7 \text{ mm}$  hat.

Das Vorhandensein eines solchen Maximums ist aber auch unschwer verständlich. Wenn das Loch genau der Öffnung des Rohres entspricht, ist sowohl  $w$  als auch  $q$  klein. Mit der allmählichen Abnahme des Lochdurchmessers nehmen  $w$  und  $q$  zu,  $w$  wächst anfänglich aber stärker als  $q$ , da letzteres gleich  $\cot \frac{\theta}{2}$  ist und die Kotangente in der Nähe von  $90^\circ$  nur langsam variiert. Bei sehr kleinen Öffnungen wird  $q$  dagegen so gross, dass die Linie  $q = \text{konst.}$  die den grossen  $a$ -Werten entsprechenden Absorptionskreise gar nicht schneidet. Bei einem gewissen mittleren Wert von  $q$  findet sich ein Absorptionskreis, den  $q = \text{konst.}$  eben tangiert und der daher den grössten Wert ergibt, den  $w$  erlangen kann. Dies ist in Fig. 16 veranschaulicht.

Sucht man den Absorptionskoeffizienten der Endfläche, wenn diese nicht mit dem Rohr verbunden ist, so ergibt sich aus den vorstehenden Ausführungen, dass

$$a = \frac{4w}{(w+1)^2 + q^2}.$$

Diese Grösse durchläuft als Funktion des Lochdurchmessers eine Fig. 14 genau entsprechende Kurve. Wenn nämlich  $w$  und  $q$

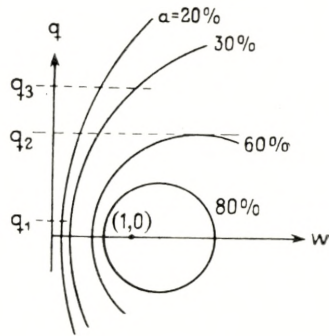


Fig. 16.

klein sind, ist  $a$  klein; wenn  $d \rightarrow 0$ , wird  $q \rightarrow \infty$  und  $w \rightarrow 0$ , so dass  $a$  wieder gegen 0 geht. Irgendwo dazwischen hat  $a$  ein Maximum, und zwar für den  $w$ -Wert, für den der Einfluss von  $w$  auf  $q$  nicht mehr dominierend ist.

Aus den in den Tab. 1 und 2 angegebenen Werten lässt sich der wahre Absorptionskoeffizient der Öffnung ermitteln. So wird z. B. für  $d = 0,8$  mm, wo  $w = 0,37$  und  $q = \cot\left(-\frac{296^\circ}{2}\right) = 1,60$ ,

$$a = \frac{4 \cdot 0,37}{1,37^2 + 1,60^2} = 0,34 \text{ oder } 34\%$$

ermittelt. Mit Hilfe der Schusterschen Brücke erhält man bei direkter Messung  $a_{0,8} = 35\%$ .

